

Barem de notare – clasa a XII-a

**Problema 1.** Să se arate că există o singură funcție derivabilă

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ astfel încât } f'(x^3 + 2x + 1) = 4x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ și } f(1) = 0.$$

Dacă  $F$  este o primitivă a lui  $f$ , să se calculeze  $F(1) - F(-2)$ .

Soluție:

Din relația  $f'(x^3 + 2x + 1) = 4x, \forall x \in \mathbb{R}$  obținem  $(3x^2 + 2)f'(x^3 + 2x + 1) = 12x^3 + 8x$

$$f(x^3 + 2x + 1) = 3x^4 + 4x^2 + C, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1,5 \text{ p})$$

$$\text{și cum } f(1) = 0 \text{ rezultă } C = 0 \quad (0,5 \text{ p})$$

$$\text{Fie } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^3 + 2x + 1$$

$$g'(x) = 3x^2 + 2, g'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ deci } g \text{ este strict crescătoare și astfel } g \text{ este injectivă}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty, g \text{ continuă, deci } g \text{ este surjectivă} \quad (1,5 \text{ p})$$

Funcția  $f$  este bine determinată, deoarece  $g(x) = x^3 + 2x + 1$  este bijectivă pe  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Observăm că } (3x^2 + 2)f(x^3 + 2x + 1) = (3x^2 + 2)(3x^4 + 4x^2)$$

$$(3x^2 + 2)f(x^3 + 2x + 1) = 9x^6 + 18x^4 + 8x^2 \quad (1 \text{ p})$$

$$F(x^3 + 2x + 1) = \frac{9x^7}{7} + \frac{18x^5}{5} + \frac{8x^3}{3} + C_1 \quad (1,5 \text{ p})$$

$$\text{Pentru } x = 0 \text{ avem } F(1) = C_1 \text{ și pentru } x = -1 \text{ avem } F(-2) = -\frac{9}{7} - \frac{18}{5} - \frac{8}{3} + C_1 \quad (0,5 \text{ p})$$

$$F(-2) - F(1) = -\frac{9}{7} - \frac{18}{5} - \frac{8}{3} = -\frac{793}{105} \quad (0,5 \text{ p})$$

**Problema 2.** Se consideră mulțimea  $G = (2; \infty)$  și funcția  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(x-2)$ .  
Să se determine o lege de compoziție  $*$  pe  $G$ , astfel încât  $(G, *)$  să fie grup, iar funcția  $f$  să fie izomorfism de la grupul  $(G, *)$  la grupul aditiv  $(\mathbb{R}, +)$ .

Soluție:

Deoarece funcția  $f$  este izomorfism de la grupul  $(G, *)$  la grupul aditiv  $(\mathbb{R}, +)$ , obținem  
că  $f$  este bijectivă, deci inversabilă **(1 p)**

și relația  $f(x * y) = f(x) + f(y)$ , pentru orice  $x, y \in G$ . **(1 p)**

$$f^{-1}(f(x * y)) = f^{-1}(f(x) + f(y)), \text{ pentru orice } x, y \in G$$

$$x * y = f^{-1}(f(x) + f(y)) \quad \mathbf{(1 \text{ p})}$$

$$\text{Se arată că } f^{-1}: \mathbb{R}_+^* \rightarrow G, \quad f^{-1}(x) = e^x + 2 \quad \mathbf{(1 \text{ p})}$$

și relația de mai sus devine

$$x * y = e^{f(x) + f(y)} + 2 = e^{\ln(x-2) + \ln(y-2)} + 2 = e^{\ln(x-2)(y-2)} + 2 \quad \mathbf{(1 \text{ p})}$$

$$= (x-2)(y-2) + 2$$

$$x * y = xy - 2x - 2y + 6, \text{ pentru orice } x, y \in (2; \infty) \quad \mathbf{(1 \text{ p})}$$

Se arată că  $*$  este lege de compoziție pe  $G$  și că  $(G, *)$  este grup. **(1 p)**

**Problema 3.** Fie  $A$  un inel cu element unitate astfel încât  $x^3 = x^2, \forall x \in A$ . Să se arate că

- a)  $x^2 = x, \forall x \in A$
- b)  $A$  este un inel comutativ.

Soluție:.

- a)**  $x \rightarrow -x \quad -x^3 = x^2, \text{ pentru } \forall x \in A \quad (1 \text{ p})$   
 $x \rightarrow x+1 \quad (x+1)^3 = (x+1)^2 \quad x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^2 + 2x + 1 \quad (1 \text{ p})$   
 $x^2 + x = 0 \quad x^2 = -x \quad (1 \text{ p})$   
 $x^3 = x, \text{ dar } \text{știm că } x^3 = x^2, \text{ ceea ce înseamnă că } x = -x \quad (1 \text{ p})$   
Se deduce imediat că  $x^2 = x \quad (0,5 \text{ p})$
- b)**  $x \rightarrow x+y \quad (x+y)^2 = x+y \quad (1 \text{ p})$   
 $x^2 + xy + yx + y^2 = x+y$   
 $xy + yx = 0 \quad (1 \text{ p})$   
 $xy = -yx = yx, \text{ pentru orice } x, y \in A \quad (0,5 \text{ p})$

**Problema 4.** Să se calculeze  $\lim_{y \searrow 0} \int_y^1 \left( \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} \right) dx$ .

*Gazeta matematică*

Soluție:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \text{ pentru orice } x > 0 \quad (1 \text{ p})$$

$$\int \left( \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} \right) dx = \int \left( \operatorname{arctg} x \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right) + (\operatorname{arctg} x)' \ln(1+x^2) \right) dx \quad (1 \text{ p})$$

$$= \int \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{arctg} x \, dx - \int \operatorname{arctg}^2 x \, dx + \operatorname{arctg} x \cdot \ln(1+x^2) - \int \frac{2x}{1+x^2} \cdot \operatorname{arctg} x \, dx \quad (1 \text{ p})$$

$$= \frac{\pi}{2} \int x' \cdot \operatorname{arctg} x \, dx - \int \operatorname{arctg}^2 x \, dx + \operatorname{arctg} x \cdot \ln(1+x^2) - \int x \cdot (\operatorname{arctg}^2 x)' \, dx \quad (2 \text{ p})$$

$$= \frac{\pi}{2} x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \int \frac{x}{1+x^2} \, dx - \int \operatorname{arctg}^2 x \, dx + \operatorname{arctg} x \cdot \ln(1+x^2) - x \cdot (\operatorname{arctg}^2 x) + \int \operatorname{arctg}^2 x \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4} \ln(1+x^2) + \operatorname{arctg} x \cdot \ln(1+x^2) - x \cdot (\operatorname{arctg}^2 x) + C \quad (1 \text{ p})$$

$$\lim_{y \searrow 0} \int_y^1 \left( \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} \right) dx$$

$$= \lim_{y \searrow 0} \left( \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} \ln 2 + \frac{\pi}{4} \cdot \ln 2 - \frac{\pi^2}{16} - \left( \frac{\pi}{2} y \cdot \operatorname{arctg} y - \frac{\pi}{4} \ln(1+y^2) + \operatorname{arctg} y \cdot \ln(1+y^2) - y \cdot (\operatorname{arctg}^2 y) \right) \right)$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{\pi^2}{16} \quad (1 \text{ p})$$

Barem de notare – clasa a IX-a

**Problema 1.** Rezolvați în  $\mathbf{R}$  ecuația:

$$\left[ \frac{4x + 1}{6} \right] = \left\{ \frac{2x - 1}{3} \right\} + x.$$

Soluție:

$$\left\{ \frac{2x-1}{3} \right\} = \frac{2x-1}{3} - \left[ \frac{2x-1}{3} \right]$$

**1p**

$$\text{Ecuația devine } \left[ \frac{2x-1}{3} \right] + \left[ \frac{4x+1}{6} \right] = x + \frac{2x-1}{3}$$

$$\text{Conform identității lui Hermite } \left[ \frac{2x-1}{3} \right] + \left[ \frac{4x+1}{6} \right] = \left[ 2 \cdot \frac{2x-1}{3} \right] \Rightarrow \left[ \frac{4x-2}{3} \right] = \frac{5x-1}{3} \quad \mathbf{2p}$$

$$\text{Fie } k \in \mathbf{Z}, k = \left[ \frac{4x-2}{3} \right] \Rightarrow x = \frac{3k+1}{5}$$

**1p**

$$\left. \begin{array}{l} k \leq \frac{(4x-2)}{3} < k+1 \Leftrightarrow k \in (-7, -2] \\ k \in \mathbf{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow k \in \{-6; -5; -4; -3; -2\}$$

**2p**

$$k \in \mathbf{Z}$$

$$\Rightarrow x \in \left\{ \frac{-17}{5}, \frac{-14}{5}, \frac{-11}{5}, \frac{-8}{5}, -1 \right\}$$

**1p.**

**Problema 2.** Determinați perimetrul triunghiului neechilateral ABC știind că

$$p^2 \cdot \overrightarrow{GI} = (4p - b - c) \cdot \overrightarrow{AI} + (4p - c - a) \cdot \overrightarrow{BI} + (4p - a - b) \cdot \overrightarrow{CI},$$

unde G este centrul de greutate al  $\Delta ABC$ , I este centrul cercului înscris în  $\Delta ABC$  iar  $p$  semiperimetrul  $\Delta ABC$ .

Soluție:

$$4p - b - c = 2p + a, 4p - c - a = 2p + b, 4p - a - b = 2p + c$$

Relația din enunț devine :

$$p^2 \cdot \overrightarrow{GI} = a \cdot \overrightarrow{AI} + b \cdot \overrightarrow{BI} + c \cdot \overrightarrow{CI} + 2p(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI})$$

**1p**

$$\overrightarrow{AI} = \frac{b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC}}{a+b+c}, \overrightarrow{BI} = \frac{c \cdot \overrightarrow{BC} + a \cdot \overrightarrow{BA}}{a+b+c}, \overrightarrow{CI} = \frac{a \cdot \overrightarrow{CA} + b \cdot \overrightarrow{CB}}{a+b+c} \Rightarrow$$

$$a \cdot \overrightarrow{AI} + b \cdot \overrightarrow{BI} + c \cdot \overrightarrow{CI} = \vec{0}$$

**3p**

Conform relației Leibniz

$$3\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} \Rightarrow$$

**1p**

$$p^2 \cdot \overrightarrow{GI} = 6p \cdot \overrightarrow{GI} \Leftrightarrow (p^2 - 6p) \cdot \overrightarrow{GI} = \vec{0}$$

$$\Delta ABC \text{ neechilateral} \Rightarrow G \neq I \Rightarrow (p^2 - 6p) = 0 \Rightarrow p = 6 \Rightarrow P_{\Delta ABC} = 12.$$

**2p**

**Problema 3.** Numerele reale  $a, b, c$  verifică:  $a + b + c = 6$  și  $a^3 + b^3 + c^3 = 36$ . Să se arate că  $abc < 12$ .

Soluție:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \Leftrightarrow$$

**2p**

$$36 - 3abc = 6(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \Leftrightarrow$$
$$12 - abc = (a - b)^2 + (c - b)^2 + (a - c)^2 \geq 0 \Rightarrow 12 \geq abc$$

**3p**

Relația are loc cu egalitate dacă și numai dacă  $a=b=c$ . În acest caz se obține  $a = 2$  și  $a^3 = 12$  contradicție. Deci  $abc < 12$  (**2p**).

**Problema 4.** Fie  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir de numere reale cu proprietatea că pentru orice  $m, n \in \mathbb{N}, m \geq n$ ,

$2(a_{m+n} + a_{m-n}) = a_{2m} + a_{2n}$  și  $a_1 = 1$ . Determinați o formulă pentru termenul general al șirului  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Soluție:

$$m = n = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$m = 1, n = 0 \Rightarrow a_2 = 4$$

**1p**

$$m = n + 2 \Rightarrow 2(a_{2n+2} + a_2) = a_{2n+4} + a_{2n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_{2n+2} + 8 = a_{2n+4} + a_{2n}$$

**1p**

$$n = 0 \Rightarrow 4a_m = a_{2m}$$

$$8a_{n+1} + 8 = 4a_{n+2} + 4a_n \Rightarrow$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + 2$$

**2p**

$$\text{Fie } b_n = a_{n+1} - a_n \Rightarrow (b_n) \text{ progresie aritmetică, } b_1 = 3, r = 2 \Rightarrow b_n = 2n + 1 \Rightarrow$$

**1p**

$$a_{n+1} - a_n = 2n + 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (2k + 1) \Rightarrow$$

$$a_n - a_0 = n(n - 1) + n \Rightarrow a_n = n^2, \forall n \in \mathbb{N}. \text{ (2p)}$$

Barem de notare – clasa a XI-a

**Problema 1.** a) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos(\operatorname{tg} x)}{x(\operatorname{tg} x - \sin x)} = 1$ ;

b) Demonstrați că  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{2016}{x} \right]$  nu există, unde  $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $a$ .

Soluție:

**a)** Scrie formula  $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$  sau o aplică direct **(0,5p)**

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos(\operatorname{tg} x)}{x(\operatorname{tg} x - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ -2 \frac{\sin \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{2} \sin \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{2}}{x(\operatorname{tg} x - \sin x)} \right]$$

$$l = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{2}}{\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{2}}{\frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{2}} \cdot \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{x} \cdot \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - \sin x} \quad (2p)$$

$$\text{Obținem : } l = -2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left( \frac{\sin x}{x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right) \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) = 1 \quad (1,5p)$$

**b)**  $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \left[ \frac{2016}{x} \right] = \infty$  **(0,5p)** deoarece  $\frac{2016}{x} - 1 < \left[ \frac{2016}{x} \right]$  **(0,5p)**

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \left( \frac{2016}{x} \right) = \infty \quad (0,5p)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \left[ \frac{2016}{x} \right] = -\infty \quad (0,5p) \text{ deoarece } \left[ \frac{2016}{x} \right] \leq \frac{2016}{x} \quad (0,5p)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \left( \frac{2016}{x} \right) = -\infty \quad (0,25p)$$

Cum  $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \left[ \frac{2016}{x} \right] \neq \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \left[ \frac{2016}{x} \right]$  rezultă că nu există  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{2016}{x} \right]$ . **(0,25p)**

**Problema 2.** Fie matricele  $A, B \in M_3(\mathbf{R})$  cu  $A \cdot A^t = B \cdot B^t = I_3$ . Să se arate că

$$\det((A - B)(A + B)) = 0.$$

*Gazeta matematică*

Soluție:

$$\text{Dacă } X \in M_3(\mathbf{R}), \text{ atunci } \det(X - X^t) = 0 \dots \dots \dots (2p)$$

$$\text{Atunci } \det((A - B)(A + B)) = \det(A - B) \cdot \det(A + B) = \dots \dots \dots (1p)$$

$$= \det(A - B) \cdot \det((A + B)^t) = \dots \dots \dots (1p)$$

$$= \det(A \cdot A^t + A \cdot B^t - B \cdot A^t - B \cdot B^t) = \det(I_3 + AB^t - BA^t - I_3) =$$

$$= \det(AB^t - (AB^t)^t) = 0 \dots \dots \dots (3p)$$

**Problema 3.** Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ .

a) Să se arate că există o infinitate de matrici  $X \in M_{3,1}(\mathbf{R})$ , astfel încât  $A \cdot X = O_3$ .

b) Să se arate că  $A^n \neq I_3, \forall n \in \mathbf{N}^*$ .

c) Să se arate că pentru  $\forall r \in \mathbf{Q} - \mathbf{Z}$  avem  $\det(A + rI_3) \neq 0$ .

Soluție:

a) Ecuația  $A \cdot X = O_3$  este echivalentă cu un sistem liniar omogen, în care  $A$  este matricea sistemului. Cum  $\det(A) = 0$ , alegem un minor  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ , deci  $\text{rang } A = 2$ . Notăm

$$z = \alpha, \alpha \in \mathbf{R} \text{ și obținem } X = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbf{R} \dots \dots \dots (3p)$$

b)  $\det A = 0$ , atunci  $\det A^n = 0$ . Cum  $\det I_3 = 1$  rezultă că  $A^n \neq I_3, \forall n \in \mathbf{N}^* \dots \dots \dots (2p)$

c)  $\det(A + rI_3) = r(r^2 + 9r - 6)$  (\*). Ecuația (\*) are o rădăcină

$$r_1 = 0 \in \mathbf{Z} \text{ și rădăcinile iraționale } r_{2,3} = \frac{-9 \pm \sqrt{105}}{2}.$$

Așadar  $\forall r \in \mathbf{Q} - \mathbf{Z}$  avem  $\det(A + rI_3) \neq 0 \dots \dots \dots (2p)$ .

**Problema 4.** Fie  $\alpha \in \mathbf{N}, \alpha \geq 3$ . Se consideră șirul de numere reale  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  cu proprietățile  $a_0 \in (0,1)$  și  $a_{n+1} = a_n - a_n^\alpha, \forall n \in \mathbf{N}$ .

**a)** Arătați că șirul  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  este convergent și are limita 0.

**b)** Determinați  $\beta \in \mathbf{N}, \beta \geq 2$  astfel încât șirul  $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$  dat prin  $b_n = \sqrt[\beta]{n} \cdot a_n, \forall n \in \mathbf{N}$  să fie convergent și să aibă limita în  $(0, +\infty)$ .

Soluție:**a)** Se deduce imediat, prin inducție după  $n$ , că  $a_n \in (0,1), \forall n \in \mathbf{N}$ . deci șirul este mărginit..... **(1p)**

Pe de altă parte,  $a_{n+1} - a_n = -a_n^\alpha < 0, \forall n \in \mathbf{N}$ , adică șirul este strict descrescător.. **(1p)**

Deducem astfel că  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  este convergent și are limita în  $[0,1)$ . Trecând la limită în relația de recurență, obținem  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ . ....**(1p)**

**b)** Folosind criteriul Cesaro-Stolz, avem:

$$\begin{aligned} l = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[\beta]{n}}{1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[\beta]{n+1} - \sqrt[\beta]{n}}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt[\beta]{(n+1)^{\beta-1}} + \dots + \sqrt[\beta]{n^{\beta-1}}} \cdot \frac{a_{n+1} a_n}{a_n - a_{n+1}} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt[\beta]{(n+1)^{\beta-1}} + \dots + \sqrt[\beta]{n^{\beta-1}}} \cdot \frac{a_n^2 (1 - a_n^{\alpha-1})}{a_n^\alpha} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt[\beta]{n^{\beta-1}}}{\sqrt[\beta]{(n+1)^{\beta-1}} + \dots + \sqrt[\beta]{n^{\beta-1}}} \cdot \frac{1 - a_n^{\alpha-1}}{\sqrt[\beta]{n^{\beta-1}} \cdot a_n^{\alpha-2}} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt[\beta]{n^{\beta-1}}}{\sqrt[\beta]{(n+1)^{\beta-1}} + \dots + \sqrt[\beta]{n^{\beta-1}}} \cdot (1 - a_n^{\alpha-1}) \cdot \frac{(\sqrt[\beta]{n})^{\alpha-2}}{\sqrt[\beta]{n^{\beta-1}} \cdot (\sqrt[\beta]{n} \cdot a_n)^{\alpha-2}} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt[\beta]{n^{\beta-1}}}{\sqrt[\beta]{(n+1)^{\beta-1}} + \dots + \sqrt[\beta]{n^{\beta-1}}} \cdot (1 - a_n^{\alpha-1}) \cdot n^{\frac{\alpha-\beta-1}{\beta}} \cdot \frac{1}{(\sqrt[\beta]{n} \cdot a_n)^{\alpha-2}} \right) \in (0, +\infty). \quad \textbf{(3p)} \end{aligned}$$

Deducem că  $\alpha - \beta - 1 = 0$ , adică  $\beta = \alpha - 1$  și mai mult:

$$l = \frac{1}{\beta \cdot l^{\alpha-2}} \Rightarrow l^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha-1} \Rightarrow l = \frac{1}{\alpha \sqrt[\alpha-1]{\alpha-1}}. \quad \textbf{(1p)}$$

Barem de notare – clasa a X-a

**Problema 1.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale:

a)  $4^x \cdot 9^{\frac{1}{x}} + 9^x \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 6^{x+\frac{1}{x}} = 108$

b)  $13 \cdot (3^{\lg x^2} + x^{\lg 4}) \leq (3 \cdot x^{\lg 3} + 2^{1+\lg x})^2$

Soluție:

a) Condiție de existență:  $x \neq 0$

Pentru  $x < 0$ , membrul stâng este mai mic decât 3. ....1p

Dacă  $x > 0$ , membrul stâng se scrie  $6^{x+\frac{1}{x}} \cdot \left[ \left( \frac{2}{3} \right)^{x-\frac{1}{x}} + \left( \frac{3}{2} \right)^{x-\frac{1}{x}} + 1 \right]$ .

Dar  $x + \frac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow 6^{x+\frac{1}{x}} \geq 36$ .

Cum  $\left( \frac{2}{3} \right)^{x-\frac{1}{x}} + \left( \frac{3}{2} \right)^{x-\frac{1}{x}} \geq 2$ , deducem că membrul stâng este mai mare sau egal cu 108.(2p)

Egalitatea se obține pentru  $x = 1$ . ....1p

b)  $(3 \cdot x^{\lg 3} + 2^{1+\lg x})^2 = (3 \cdot 3^{\lg x} + 2 \cdot 2^{\lg x})^2 \leq 13 \cdot (3^{2\lg x} + 2^{2\lg x})$  conform C.B.S .....1p

Dar  $3^{2\lg x} + 2^{2\lg x} = 3^{\lg x^2} + x^{\lg 4}$ .

Rezultă condiția  $\frac{3}{3^{\lg x}} = \frac{2}{2^{\lg x}} \Leftrightarrow \left( \frac{3}{2} \right)^{\lg x} = \frac{3}{2}$ . ....1,5p

Deci  $x = 10$ . ....0,5p

**Problema 2.** Se consideră mulțimea  $A$  și funcția  $f: A \rightarrow A$ . Știind că  $|A| = 2015$  și  $f \circ f \circ f = 1_A$ , demonstrați că  $\{x \in A \mid f(x) = x\}$  are cel puțin două elemente.

Soluție:

Din  $f \circ f \circ f = 1_A$  rezultă că  $f$  este bijectivă. ....1p

Presupunând că  $f$  nu are niciun punct fix, rezultă  $f(x) \neq x, \forall x \in A$ , apoi  $f(f(x)) \neq f(x)$  și în final că  $x, f(x), f(f(x))$  sunt distincte două câte două, Rezultă că  $A$  se poate scrie ca o reuniune finită de triplete de această formă, deci  $|A|$  este multiplu de 3. Contradicție! .....3p

Dacă presupunem că  $f$  are un singur punct fix  $x_0$ , rezultă analog că  $|A - \{x_0\}|$  este multiplu de 3. Contradicție! .....2p

Deci  $f$  are cel puțin două puncte fixe. ....1p

**Problema 3.** Fie  $a, b, c \in \mathbb{C}^*$  astfel încât  $|b|^2 = 3|a| \cdot |c|$  iar  $\arg a, \arg b, \arg c$  sunt în progresie aritmetică. Dacă  $z_1$  și  $z_2$  sunt rădăcinile ecuației  $az^2 + bz + c = 0$ , demonstrați că punctele  $M_1(z_1), M_2(z_2)$  și  $O$  (originea axelor de coordonate), sunt vârfurile unui triunghi echilateral.

Soluție:

Considerăm:  $a = R(\cos \alpha + i \sin \alpha), c = r(\cos \beta + i \sin \beta), b = \sqrt{3Rr} \left( \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + i \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$

unde  $r, R > 0$  și  $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ . ....1p

Se obține  $\Delta = -Rr [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)] = (\sqrt{Rr})^2 i^2 \left( \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + i \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2$

și  $z_{1,2} = -\sqrt{\frac{r}{R}} \cdot \frac{-\sqrt{3} \pm i}{2} \cdot \left( \cos \frac{\beta - \alpha}{2} + i \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \right)$  .....3p

Atunci  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{-\sqrt{3} - i}{2}}{\frac{-\sqrt{3} + i}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$  .....1p

Deci  $z_1 = z_2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$  sau  $z_1 - 0 = \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \cdot (z_2 - 0)$ , adică  $M_1(z_1), M_2(z_2)$  și  $O(0)$  sunt vârfurile unui triunghi echilateral. ....2p

**Problema 4.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale

$$\sqrt[3]{x\sqrt{x}} - \sqrt[7]{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = 6\sqrt[12]{x\sqrt{x}}.$$

*Gazeta matematică*

Soluție:

Condiția de existență a radicalului:  $x \geq 0$

Ecuția se scrie:  $x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}} = 6x^{\frac{1}{8}}$ . Notăm  $x = t^8$  .....**3p**

Obținem ecuația:  $t^4 - t^2 - 6t = 0 \Rightarrow t(t^3 - t - 6) = 0 \Rightarrow t_1 = 0$  .....**1p**

Sau  $t^3 - t - 6 = 0 \Rightarrow t^3 - 4t + 3t - 6 = 0 \Rightarrow t(t^2 - 4) + 3(t - 2) = 0$  .....**1p**

Rezultă  $(t - 2) \cdot (t^2 + 2t + 3) = 0 \Rightarrow t_2 = 2$  .....**0,5p**

Sau  $t^2 + 2t + 3 = 0 \Rightarrow \Delta_t = -8 < 0 \Rightarrow$  ecuația nu are soluții reale. ....**0,5p**

Obținem  $x \in \{0; 256\}$  .....**1p.**